

Aufgabe 2.2b

ode_problem_2_2b.m

```
% Author: Matthias Bosewitz
% Zettel: 2
% Aufgabe: 2b

% Funktion f für die Gleichung
% x'(t) = f(t,x)
function y = ode_problem_2_2b(t,x)
    global lambda;
    y = lambda * abs(x) * x;
end
```

testrun_problem_2_2b.m

```
% Author: Matthias Bosewitz
% Zettel: 2
% Aufgabe: 2b

% Probieren ob das geht
global lambda;
lambda = -1000; % Lambda auf den Wert setzen

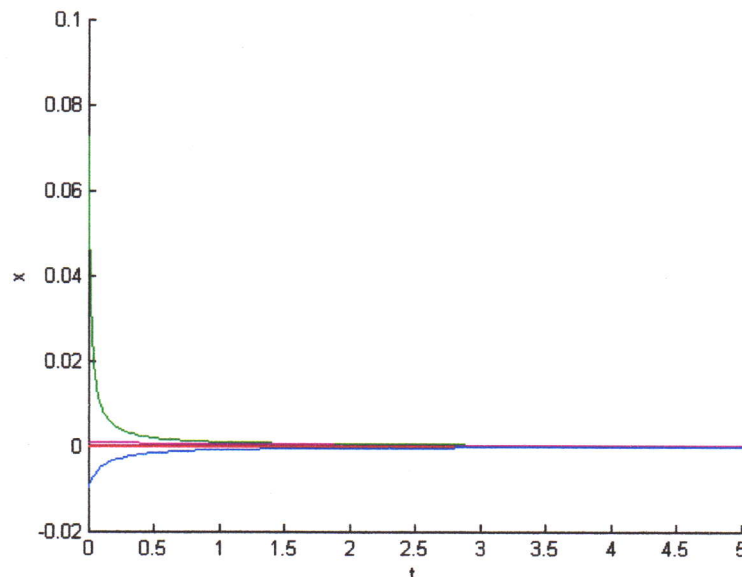
hold on;
xlabel 't';
ylabel 'x';

x_0 = 0; % Ausprobieren mit 0
[t, x] = ode45(@ode_problem_2_2b, [0 5], x_0);
plot(t,x, '-', 'Color', [1 0 0]); % Rot

x_0 = 0.1; % Ausprobieren
[t, x] = ode45(@ode_problem_2_2b, [0 5], x_0);
plot(t,x, '-', 'Color', [0 .4 0]); % Grün

x_0 = -0.01; % Ausprobieren
[t, x] = ode45(@ode_problem_2_2b, [0 5], x_0);
plot(t,x, '-', 'Color', [0 0 1]); % Blau

x_0 = 0.001; % Ausprobieren
[t, x] = ode45(@ode_problem_2_2b, [0 5], x_0);
plot(t,x, '-', 'Color', [.8 0 .8]); % Magenta
```

Ausführen von
testrun_problem_2_2b.m:

Num II

2.1a

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = -\exp(x_1)x_2$$

$$x_* = 0$$

Linearisieren:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + o(x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - o(\|x\|^2)$$

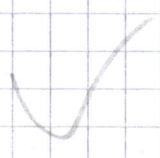
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = (-1-\lambda)^2$$

$$\Rightarrow \lambda = -1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) = -1$$

$\Rightarrow$ (asymptotisch) stabil



2.1b

$$\dot{x}_1 = \cos(x_1) - \exp(-x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_2$$

Linearisieren:

$$\dot{x}_1 = 1 - x_1 - 1 + x_2 + o(\|x\|^2)$$

$$\dot{x}_2 = \cancel{x_1 x_2} + o(\|x\|^2)$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

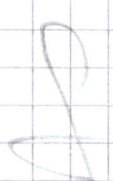
$$\Rightarrow \Delta = (-1-\lambda)(-\lambda) - 0$$

$$= 1 + \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = -1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) = -1$$

$\Rightarrow$ asymptotisch stabil



1/2

2.2d

$$\dot{x} = \lambda |x(t)| x(t)$$

$$t > 0$$

$$x(0) = x_0$$

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - \lambda |x_0| t}$$

$$x_* = 0$$

$$\lambda < 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{|x_*| \tilde{x}_0}{1 - \lambda |x_0| t} - \frac{\tilde{x}_0}{1 - \lambda \tilde{x}_0 t} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{|\tilde{x}_0|}{1 - \lambda \tilde{x}_0 t} \right|$$

$$= 0 \quad \frac{\tilde{x}_0}{1 - \lambda \tilde{x}_0 t} = 0$$

oder
 $x_0 = 0$

$\Rightarrow$ asymptotisch stabil

✓

2.2c

2

1/2TP

2/2PP

2.3a

$$x_{k+1} = B x_k$$

$$\text{stabil} \Leftrightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \|B^k\| < \infty$$

$$x_k = B^k x_0$$

$$(\text{explizite Lösung}) \Rightarrow \tilde{x}_k = B^k \tilde{x}_0$$

stabil: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k - \tilde{x}_k\| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k - \tilde{x}_k\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|B^k x_0 - B^k \tilde{x}_0\|$$

$$= \sup_{k \in \mathbb{N}} \|B^k (x_0 - \tilde{x}_0)\|$$

$$\leq C \sup_{k \in \mathbb{N}} \|B^k\| \cdot \delta$$

↑ Äquivalenz Normen

Das < ε



$$\Leftrightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \|B^k\| < \infty$$



2.3b

$$x_{k+1} = B x_k$$

$$\text{asym stable} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\| = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - \tilde{x}_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k (x_0 - \tilde{x}_0)\|$$

$\neq 0$

"falsch":



$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\| = 0$$



Die zweite Richtung hätte ich schon
vielmal präzise aufschreiben können!

15/2

P 34

$$(a) \quad \psi^T x = x + \tau \lambda \left(\frac{\tau}{2} (x + \psi^T x) \right)$$

$$R(z) = 1 + z \left(\frac{\tau}{2} (1 + R(z)) \right)$$

$$\Rightarrow R(z) \left(1 - \frac{z}{2} \right) = 1 + \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow R(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \quad \checkmark$$

$$(c) \quad \psi^T x = x + \frac{\tau}{2} \tau \lambda (x + \psi^T x)$$

$$\Rightarrow R(z) = 1 + \frac{\tau}{2} z (1 + R(z))$$

$$\Rightarrow R(z) \left(1 - \frac{z}{2} \right) = 1 + \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow R(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \quad \checkmark$$

(b) Butcher Schema:

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$g_i = \frac{\det M^{(i)}}{\det M}$$

$$M = (I - zA)$$

M^i hat in der i -ten Zeile n Nullen.

$$\det M = (1 - z \frac{z}{2})^2 \cdot (1 - z)$$

$$\det M^{(1)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \frac{z}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 - z \end{pmatrix} = (1 - \frac{z}{2} z) \cdot (1 - z)$$

$$\det M^{(2)} = (1 - \frac{z}{2} z) \cdot (1 - z)$$

$$\det M^{(3)} = (1 - \frac{z}{2} z)^2$$

$$R(z) = 1 + z \sum_{i=1}^3 b_i y_i$$

$$= z \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{z}{2} z} + z \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{z}{2} z} + z \frac{1}{3} \frac{1}{1 - z}$$

Was ist wohl nicht das gesuchte

$$2/3 \cdot R(z) ?$$